استعمالات المُشتقة -أمثلة محلولة

معطاة الدالة $F(x)=x^3-Ax^2+4x$ (A بارامتر)

معلوم أنه ميل المماس للدالة في النقطة X=1 هو -1.

أ. جد قيمة A ؟

ب. جد مُعادلة المماس للدالة في النقطة X=1 ؟

ج. جد النقاط القصوى للدالة وحدد نوعها ؟

د. ما هي المجالات التصاعُدية والتنازُلية للدالة؟

الحل :

أ. حسب المُعطيات ميل المماس للدالة في النقطة X=1 هو -1 أي $F'(1)=-1$،

لذلك نجد المشتقة ونعوض فيها X=1 :

$F'(x)=3x^2-2Ax+4$

$F'(1)=-1$

$F'(1)=3(1)^2-2A(1)+4=-1 \longrightarrow 3-2A+4=-1 \longrightarrow ...... \longrightarrow A=4$

أذا حصلنا على A=4 ، نعوض A=4 في الدالة والمُشتقة نحصل على:

$F(x)=x^3-4x^2+4x$

$F'(x)=3x^2-8x+4$

ب. نجد معادلة المماس للدالة في X=1:

تذكر: مُعادلة المماس هي مُعادلة خط مستقيم أي من الصورة: Y=mX+n

بحيث m ميل المماس و n هي تقاطع المستقيم مع المحور Y

بحسب المعطيات ميل المماس للدالة في هذه النقطة X=1 هو -1 أي m = - 1 .

<u>بقي أن نجد n:</u>

لكي نجد n يجب أن نجد نقطة التماس (المشتركة للدالة والمماس)

هذه النقطة هي من الصورة (1 , y) وتقع على الدالة ولذلك لكي نجد y نُعوض بالدالة X=1

إذاً :

$F(1)=1^3-4(1)^2+4(1)=1$

ونقطة التماس هي(1,1)

نعوض الآن في معادلة المستقيم ونجد n

$1=-1(1)+n \longrightarrow n=2$

<u>إذاً معادلة المماس في النقطة X=1 هي Y =-1X+2</u>

ج .النقاط القصوى للدالة هي نقاط التي تُحقق أن F'(x)= 0 أي:

$3x^2-8x+4=0$

هذه هي معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور ونحصل على :

$X_1=2$ و $X_2=2/3$

نصنف النقاط بطريقتين – بواسطة المشتقة الأولى (جدول وجوار) وبواسطة المُشتقة الثانية.

نصنف $X_1=2$ بواسطة المشتقة الأولى (جدول وجوار)

X=3	X=2	X=1	الجوار ←
$3(3)^2-8(3)+4=61 >0$	0	$3(1)^2-8(1)+4=-1 <0$	$F'(x) =3x^2-8x+4$
تصاعدية ↗		تنازُلية ↘	F(x)

أذاً النقطة X=2 هي نقطة نهاية صُغرى- **מינימום**

<u>نصنف النقطة الثانية بواسطة المشتقة الثانية F''(x) :</u>

نجد المشتقة الثانية عن طريق اشتقاق المُشتقة الأولى (أي نتعامل مع المشتقة الأولى على أنها دالة ونجد مُشتقتها)

$F'(x)=3x^2-8x+4$

إذاً

$F''(x)= 6x-8$

نُعوض النقطة $X_2=2/3$ ($X_2=0.666$) في المشتقة الثانية ونحصل على:

$F''(x)= 6x-8$

$F''(0.666)= 6(0.666)-8= - 4<0$

إذاً النقطة $X_2=2/3$ ($X_2=0.666$) هي نقطة نهاية عظمى- מקסימום

د. المجالات التصاعُدية والتنازُلية- ورسم تقريبي للدالة

النقاط القصوى (מנימום ומקסימום) تُحدد لنا المجالات التصاعُدية والتنازُلية فالمجال الذي قبل نقطة نهاية صغرى(מנימום) هو تنازلي وبعدها تصاعُدي ، وعلى العكس بالنسبة لنقطة النهاية العُظمى (מקסימום) فالمجال قبلها تصاعدي وبعدها تنازلي

أذًا بما أن :

النقطة $X_2=2/3$ ($X_2=0.666$) هي نقطة نهاية عظمى- מקסימום

والنقطة $X=2$ هي نقطة نهاية صُغرى- **מינימום**

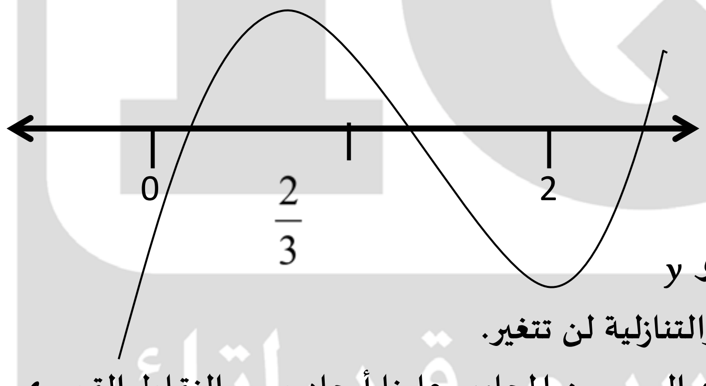
إذاً:

في المجال $x < \frac{2}{3}$ الدالة ستكون تصاعدية (حتى نقطة النهاية العُظمى)

وفي المجال بين $x < \frac{2}{3}$ و $x=2$ ستكون الدالة تنازلية أي المجال التنازلي $\frac{2}{3} < x < 2$

وفي المجال $x > 2$ الدالة ستكون تصاعدية

أذا حاولنا رسم رسم تقريبي للدالة حسب نقاط النهاية الصغرى والعظمى سنحصُل على الشكل التالي الذي يوضح لنا المجالات التصاعدية والتنازلية:



واضح أننا لا نعلم ما هو الأحداثي y للنقاط ولذلك لا يُمكنا تحديد موقع الرسم من المحورx، أو y ولكن المجالات التصاعدية والتنازلية لن تتغير.

لكي نُحدد الوضع الدقيق من الرسم من المحاور ،علينا أيجاد صور النقاط القصوى.....

بحث دالة البولينوم:

بحث دالة البولينوم يرتكز بالأساس على مرحلتين رئيسيتين اللتين ستُمكننا من رسم الدالة بشكل تقريبي :

أولاً : إيجاد التقاطع مع المحاور X و Y

ثانياً : إيجاد النقاط القصوى وتصنيفها.

مثال:

أبحث الدالة $F(x)=\frac{x}{3}(x^2-9)$

الحل:

أولاً نجد نقاط التقاطع مع المحاور:

<u>تقاطع مع المحور y- نُعوّض x = 0</u>

نُعوض بالدالة نحصل على

$$F(0)=\frac{0}{3}(0^2-9)=0$$

إذاً نقطة تقاطع الدالة مع المحور y هي (0،0)-تذكر التقاطع مع مع المحور y يكون نقطة واحدة دائماً

<u>تقاطع مع المحور x- نُعوّض y=0</u>

نُعوض بالدالة نحصل على:

$$F(x)=\frac{x}{3}(x^2-9)=0$$

وهنا حصلنا على مُعادلة التي هي عبارة عن **حاصل ضرب عددين يساوي صفر**

وهذا **يتحقق فقط إذا كان** أحد العددين صفر أي:

$$\frac{x}{3}=0 \quad \textbf{أو} \quad x^2-9=0$$

$x = 0$ أو $X^2= 9$ → $\boxed{X=3}$ ، $\boxed{X=-3}$

أذاً مع المحور x هنالك 3 نقاط تقاطع وهي (0،0) ، (0،3) ،(-0،3)

المرحلة الثانية من بحث الدالة هي إيجاد النقاط القصوى وتصنيفها:

النقاط القصوى هي النقاط التي تُحقق أن F'(x)= 0:

$$F(x)=\frac{x}{3}(x^2-9)$$

لكي نجد المشتقة نفك الأقواس ونحصل على :

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-3x$$

$$F'(x)=\frac{3x^2}{3}-3=x^2-3$$

نجد متى المشتقة تساوي صفر:

$$X^2-3=0 \longrightarrow x^2=3 \longrightarrow \boxed{x_1=\sqrt{3}} \quad \boxed{x_1=-\sqrt{3}}$$

نُصنف النقاط التي حصلنا عليها - بواسطة المُشتقة الثانية:

نجد أولاً المشتقة الثانية:

$F'(x)=x^2-3$

$F''(x)=2x$

نُعَوّض النقاط في المشتقة الثانية،نحصل على:

$$F''(\sqrt{3})=2\sqrt{3}=6.928>0$$

إذاً النقطة $x_1=\sqrt{3}$ هي نقطة نهاية صغرى- מינימום

نفحص النقطة الثانية:

$$F''(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}=-6.928<0$$

إذاً النقطة $x_1=\sqrt{3}$ هي نقطة نهاية عُظمى- **מקסימום**

لكي نرسم رسم تقريبي للدالة نجد صور النقاط القصوى:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-3x$$

$$F(\sqrt{3})=\frac{(\sqrt{3})^3}{3}-3\sqrt{3}=-3.464$$

$$F(-\sqrt{3})=\frac{(-\sqrt{3})^3}{3}-3(-\sqrt{3})=+3.464$$

إذا نُقطة النهاية الصغرى هي : $(\sqrt{3},-3.464)$ **. ونقطة النهاية العظمى هي:** $(-\sqrt{3},3.464)$

<u>نُلخص النتائج التي حصلنا عليها :</u>

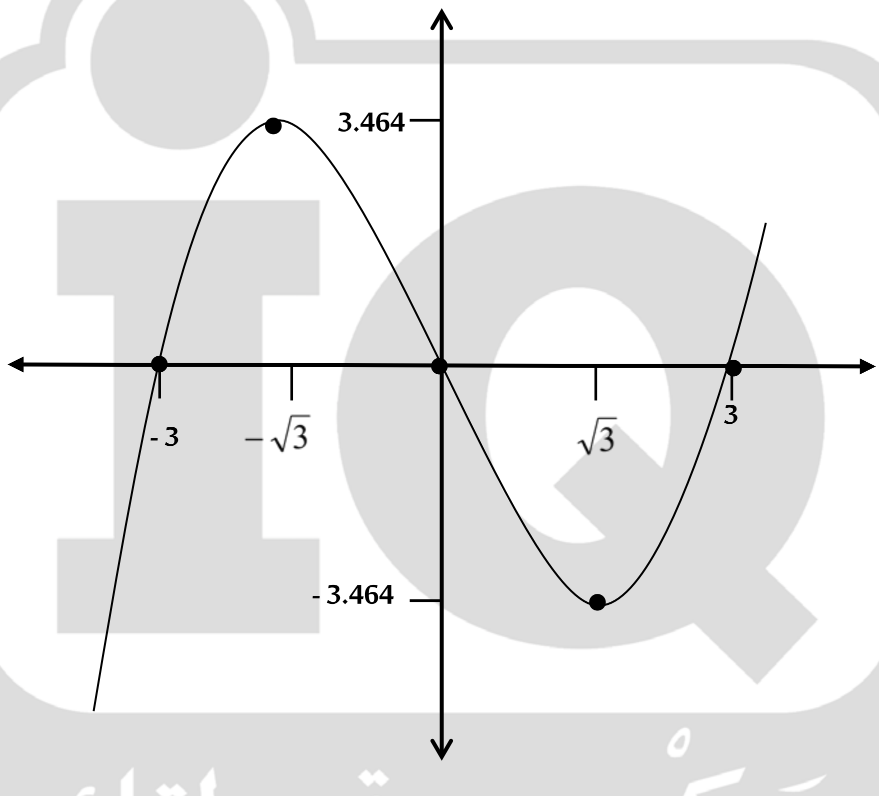
نقطة تقاطع الدالة مع المحور y هي (0،0)

نقاط تقاطع مع المحور x هي (0،0) ، (0،3) ،(-0،3)

نقطة النهاية الصغرى هي : $(\sqrt{3},-3.464)$

نقطة النهاية العظمى هي: $(-\sqrt{3},3.464)$

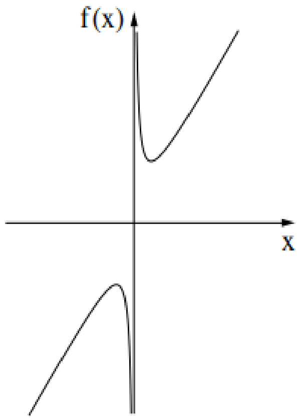
<u>نُعين النقاط في هيئة محاور ونرسم الرسم</u>



حلول أسئلة بجروت-بحث دوال

سؤال 4 من امتحان بجروت شتاء 2018-الوحدة الثالثة:

حساب التفاضل والتكامل



4. أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)=4x+\frac{16}{x}$.

أ. ما هو مجال تعريف الدالّة $f(x)$ ؟

ب. جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ،

وحدّد نوع هذه النقاط اعتمادًا على الرسم البيانيّ.

في النقطة التي فيها $x = 4$ مرّروا مماسًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

جـ. (1) جد ميل المماسّ.

(2) جد معادلة المماسّ.

د. (1) جد معادلة المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في نقطة نهايتها العظمى.

(2) جد إحداثيّات نقطة تقاطع المماسّين.

الحل:

أ. مجال تعريف الدالة هو النقاط التي فيها المقام لا يُساوي صفر...... أي بهذه الحالة مجال التعريف هو $x \neq 0$.

ب. النقاط القُصوى هي نقاط التي فيها المُشتقة تُساوي صفر،أي التي تُحقق أن $f'(x)=0$

نجد المُشتقة أولاً :

$$f(x)=4x+\frac{16}{x}$$

$$f'(x)=4-\frac{16}{x^2}$$

$$f'(x)=4-\frac{16}{x^2}=0$$

$$4-\frac{16}{x^2}=0 \rightarrow 4=\frac{16}{x^2}$$

$$4x^2=16 \rightarrow x^2=\frac{16}{4}=4$$

$$x^2=4 \rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

انتبه:

الدالة $f(x)=4x+\frac{16}{x}$

ويُمكن كتابتها $f(x)=4x+16\cdot\frac{1}{x}$

ومُشتقة الدالة $\frac{1}{x}$ هي : $-\frac{1}{x^2}$ ومن ثم نضرب المُشتقة بـ 16

إذاً النقاط القُصوى هي : $x_1=2$ ، $x_2=-2$ ،

وبحسب الرسم البياني نستنتج أن $x_1=2$: هي نُقطة min (بالجزء الموجب من الرسم)

والنُقطة $x_2=-2$ max(بالجزء السالب من الرسم)

جـ.1 ميل المماس لدالة بنُقطة هو قيمة المُشتقة بتلك النُقطة،لذلك ميل المماس في **x= 4** هو f '(4) نُعوض بالمُشتقة ونجد الميل:

$$f'(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$$

$$f'(4) = 4 - \frac{16}{4^2} = 4 - 1 = 3$$

إذا ميل المماس بالنُقطة **x= 4** هو 3

جـ.2 لكي نجد مُعادلة المماس يجب أن نجد أولاً نُقطة التماس التي تقع على الدالة وعلى المماس أيضاً وهي النُقطة المُشتركة للدالة والمماس.

$$f(x) = 4x + \frac{16}{x}$$

$$f(4) = 4 \cdot 4 + \frac{16}{4} = 16 + 4 = 20$$

إذًا نُقطة التماس هي : **(20،4)**

بهذه المرحلة أصبح معنا ميل المماس ونُقطة تقع عليه وبإمكاننا أن نجد مُعادلته:

تذكر: مُعادلة المماس هي مُعادلة خط مستقيم أي من الصورة: Y=mX+n

بحيث m ميل المماس و n هي تقاطع المستقيم مع المحور Y

أذاً **m=3** ونُقطة التماس هي **(20،4)** نُعوّض ونجد**n**

Y=mX+n ⟶ 20=3·4+n ⟶ 20=12+n ⟶ 8=n

إذاً مُعادلة المماس هي :

Y=3X+8

د.1 ميل المماس في نُقطة النهاية العُظمى للدالة هو 0 ،لأن المشتقة تساوي 0 في تلك النُقطة.

من هُنا فإن مُعادلة المماس ستكون من الصورة : **Y=0X+n** أي **Y= n** .أي موازٍ لمحور**X** .

نجد إحداثيات نُقطة النهاية العُظمى وعندها نجد n. نُقطة النهاية العُظمى للدالة هي : x_2**=-2**

نُعوض بالدالة ونجد الصورة :

$$f(x) = 4x + \frac{16}{x} \rightarrow f(-2) = 4(-2) + \frac{16}{-2} = -8 - 8 = -16$$

إذاً مُعادلة المماس في نُقطة نهايتها الصُغرى هي : **Y= -16**

د.2 نُقطة تقاطع المماسين نحصل عليها بواسطة حل المُعادلتين : **Y=3X+8** و **Y= -16** .

نُعوض **-16** مكان **Y** بالمُعادلة الأولى ونجد **X** ونحصُل على **X= -8** .

إذاً نُقطة تقاطع المماسين هي : (0،-8).

حل سؤال 4 من امتحان بجروت صيف 2017 موعد ب-الوحدة الثالثة:

4. معطاة الدالّة $f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$.

أ. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

ب. جد إحداثيّات النقطة القصوى الداخليّة للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقطة.

جـ. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$.

د. جد إحداثيّات نقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور y .

هـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

و. هل الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يقطع المحور x ؟ علّل.

تذكر:

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

مُشتقتها هي:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

والمُشتقة غير مُعرفة في x=0

أي لا يُمكن استعمال x=0

لفحص جوار......

الحل:

أ. مجال تعريف الدالة هو $x \geq 0$ (العدد تحت الجذر لا يُمكن أن يكون سالب).

ب. لكي نجد إحداثيات النُقاط القصوى نجد المشتقة ونُساويها لـ 0.

$$f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$$

$$f'(x) = 3 - \frac{6}{2\sqrt{x}} + 0 \rightarrow f'(x) = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow 3 = \frac{3}{\sqrt{x}} \rightarrow 3\sqrt{x} = 3 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$$

إذاً: x=1 هي نُقطة قُصوى- نُصنفها بواسطة جدول للمُشتقة :

الجوار →	X=05	X=1	X=2
F'(x) =	-1.242	0	
F(x)	تنازُلية ↘		تصاعدية ↗

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$f'(0.5) = 3 - \frac{3}{\sqrt{0.5}} = 3 - \frac{3}{0.707} = 3 - 4.242 = -1.242 < 0$$

$$f'(2) = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} = 3 - \frac{3}{1.4142} = 3 - \frac{2}{1.121} = 0,979 > 0$$

إذاً x=1 هي نُقطة نهاية صُغرى. لكي نجد Y نُعوض بالدالة:

$f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$

$f(3) = 3 \cdot 1 - 6\sqrt{1} + 7 = 4$

إذاً أحداثيات نُقطة النهاية الصُغرى للدالة هي : (1,4).

ملاحظة : المُشتقة غير مُعرفة في x=0 لذلك لا يُمكن أن نأخذها في الجوار......

ج المجالات التصاعدية والتنازُلية للدالة:

مجال تعريف الدالة هو $x \geq 0$ والنُقطة النهاية الصُغرى للدالة هي (1,4). إذاً:

المجال التنازلي هو: $0 \leq x < 1$

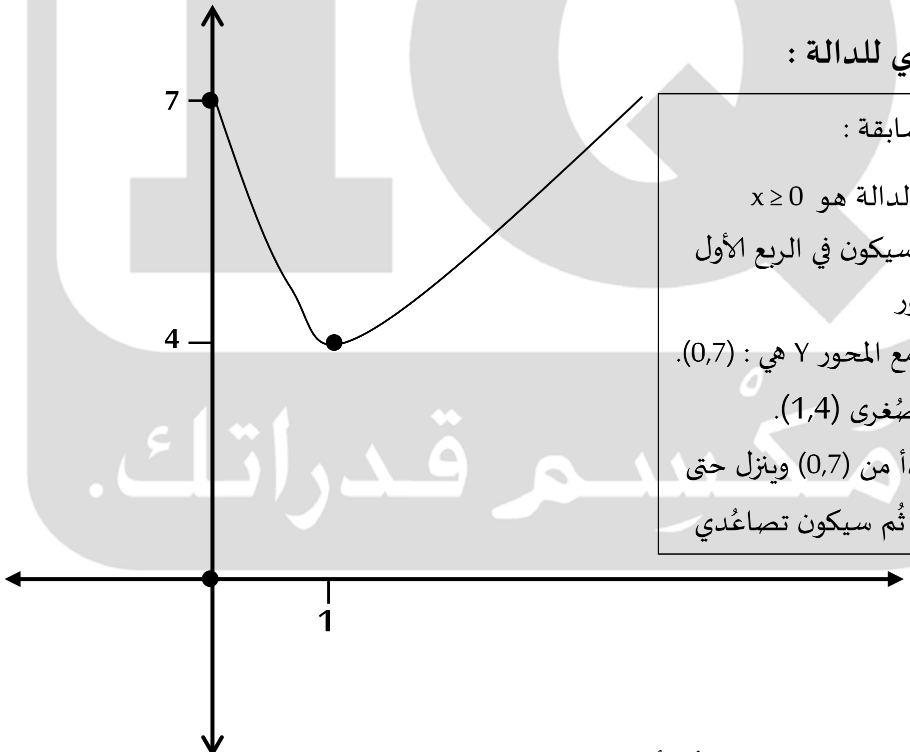
المجال التصاعُدي هو: $x > 1$

د. تقاطع الرسم البياني مع المحور Y (X=0)

$f(0) = 3 \cdot 0 - 6\sqrt{0} + 7 = 7$

نُقطة التقاطُع مع المحور Y هي : (0,7).

هـ. رسم تقريبي للدالة :



بحسب البنود السابقة :

1. مجال تعريف الدالة هو $x \geq 0$
   ولذلك الرسم سيكون في الربع الأول من هيئة المحاور
2. نقطة التقاطع مع المحور Y هي : (0,7).
3. نقطة النهاية الصُغرى (1,4).

لذلك الرسم سيبدأ من (0,7) وينزل حتى النُقطة(1,4) ومن ثُم سيكون تصاعُدي

و. الرسم لن يقطع المحور X لأن أصغر قيمة للدالة هي 1.