مجال تعريف الدالة وخطوط التقارب

سنعرض فيما يلي نُقاط ،ملاحظات وتوجيهات للتعامل مع أنواع الدوال المُختلفة وكيفية إيجاد مجال تعريف الدالة وخطوط التقارب لكل واحدة منها.

نقاط ومُلاحظات عامة:

1.مجال تعريف الدالة هو مجموعة المصادر التي صُوّرها مُعرفة.

2. في كُل نُقطة التي فيها الدالة غير مُعرفة "***ينقطع***" تواصل الرسم البياني ،وينقسم إلى جُزئين: جُزء ما قبل النُقطة ،وجُزء ما بعد النُقطة.

3. إذا كانت الدالة غير مُعرّفة في نُقطة مُعينة ،إذاً في تلك النُقطة إما أن يكون للدالة خط تقارب؛ أو أن يكون "ثُقب"، وذلك بحسب تصرُّف الدالة بجوار النُقطة التي فيها الدالة غير مُعرّفة:

(أ) إذا كانت قيمة الدالة بجوار النُقطة غير المُعرّفة - من يمين النُقطة ومن يسارها، تَحصل على نفس القيمة - إذاً النُقطة هي "**ثُقب**"؛ وبشكل عام في نُقطة " **ثُقب**" تكون قيمة البسط والمقام في الدالة 0 .

(ب)إذا كانت قيمة الدالة بجوار النُقطة غير المُعرفة *من اليمين*، **مُختلفة عن** قيمة الدالة بجوار النُقطة غير المُعرفة *من اليسار* ،إذاً يوجد للدالة خط تقارب عامودي وعادةً تؤول الدالة بجوار النُقطة في هذه الحالة إلى ما لا نهاية ($\pm\infty$) وبهذه الحالة تكون قيمة المقام صفر والبسط لا يُساوي صفر.

4. **خطوط التقارُب الأفقية:**

يكون للدالة خط تقارُب أفقي إذا كانت قيمة الدالة (y) تَقَترب من قيمة عددية مُعينة عندما يقترب x إلى ما لا نهاية؛ ($+\infty$) أو ($-\infty$).

من المُمكن أن يكون للدالة خطي تقارُب أفُقيين ،واحد عندما يقترب x إلى ($+\infty$) وآخر عندما يقترب x إلى ($-\infty$).....

الدالة النسبية

تعريف:

الدالة النسبية هي دالة التي عبارة عن حاصل قسمة دالتين.

الصورة العامة للدالة النسبية هي : $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$.

الدوال g(x) وh(x) ممكن أن تكون بولينوم أو دالة جذر مُركبة أو دوال مُثلثية....

مجال تعريف الدالة النسبية -التي البسط والمقام فيها دوال بولينوم -هو كل المصادر التي تُحقق أن: $h(x)\neq 0$ وعندها في النقاط التي تُحقق أن: $h(x)=0$ سيكون للدالة **خط تقارُب عامودي** أو "**ثُقب**"

مثال

مُعطى الدالة: $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-1}$. جد مجال تعريف الدالة وخطوط التقارُب المُعامدة للمحاور؟

الحل :

مجال تعريف الدالة هو كل x يُحقق أن: $2x^2+x-1\neq 0$.

نجد النقاط التي تُعطينا $2x^2+x-1=0$ ونستثنيها من مجال التعريف.

نحل المُعادلة :$2x^2+x-1=0$ ..... نحصُل على حلين، الأول $x_1=-1$ والثاني $x_2=0.5$.

أي أن مجال تعريف الدالة هو كل الأعداد ما عدا $x_1=-1$ أو $x_2=0.5$

ونكتب : مجال تعريف الدالة $x\neq -1$ أو $x\neq 0.5$

خطوط التقارُب العامودية:

نفحص هل سيكون للدالة خط تقارُب أو ثُقب في النقاط $x_1=-1$ أو $x_2=0.5$:

نُعوض النقاط بالبسط ونجد قيمة البسط، إذا حصلنا على 0 إذاً النُقطة ثُقب ولإي قيمة أُخرى،خط تقارُب.

نُعوّض $x_1=-1$ و $x_2=0.5$ بالبسط ونفحص:

$2(-1)^2+3(-1)-2=-3$ ، إذاً قيمة البسط لا تُساوي صفر بالنُقطة $x_1=-1$ وبالتالي للدالة خط تقارُب عامودي في $x=-1$.

$2(0.5)^2+3(0.5)-2=0$ ، إذاً قيمة البسط تُساوي صفر بالنُقطة $x_2=0.5$ وبالتالي النُقطة $x_2=0.5$ هي ثُقب للدالة.

إذاً للدالة خط تقارُب عامودي في $x=-1$ ، وثُقب بالنُقطة $x=0.5$.

أنتبه :

الدالة $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-1}$ يُمكن أن نكتبها كالتالي : $f(x)=\frac{\cancel{(2x-1)}(x+2)}{\cancel{(2x-1)}(x+1)}$ ويُمكن إختزال القوس (2x-1) من البسط مع المقام _ تحت الشرط أن $x\neq 0.5$ التي هي نُقطة ثُقب للدالة- وعندها تُصبح الدالة : $f(x)=\frac{(x+2)}{(x+1)}$ تحت الشرط أن $x\neq 0.5$ .....

وإذا عوضنا $x=0.5$ بهذه الصورة سنحصل على: $f(0.5)=1.6666$ وهذه النُقطة ستكون ثُقب للدالة.

وكذلك إذا عوضنا نقطة بجوار $x=0.5$ من اليسار، مثلاً $x=0.49$ ونُقطة أُخرى بجوار $x=0.5$ من اليمين،مثلاً $x=0.51$ فإن قيمة الدالة بهذه النقاط ستقترب من 1.6666 .....

خطوط التقارُب الأُفُقية:

نحسب هل تقترب الدالة من قيمة عددية مُعرّفة عندما يقترب x إلى ما لا نهاية ($\pm\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-1}=\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+0+0}{2+0+0}=1$$

شرح وتوضيحات:

حقوق الطبع محفوظة لمعهد IQ - بسيخومتري وبجروت

1. لكي نجد القيمة التي تقترب منها الدالة عندما يقترب x إلى ما لا نهاية :($\pm\infty$)، نقسم كل مُركب بالبسط والمقام على أكبر قوة مرفوع لها x بالدالة ، وبهذه الحالة نقسم على x^2 ونفحص القيمة التي يقترب منها كل مُرّكب بالبسط ،وكل مُركب بالمقام ..... وفي الدالة المُعطاة معنا ،بعد أن قسمنا كل مرّكب على x^2 ،نحصل في البسط على 2 وفي المقام نحصل 2 أيضاً (قيمة المُركبات داخل الدوائر ،عندما يقترب x إلى ما لا نهاية، هي 0) وبالتالي حاصل القسمة هو 1 أي أن مُعادلة خط التقارب الأفقي هي $y = 1$.
2. في الدالة المُعطاة نحصل على نفس القيمة للدالة عندما يقترب x إلى($-\infty$) أيضاً لأن القوى زوجية.....

دالة الجذر المُركبة

دالة الجذر المُركبة:

دالة الجذر المُركبة هي دالة من الصورة : $f(x)=\sqrt{g(x)}$

مجال تعريف كل دالة من الصورة : $f(x)=\sqrt{g(x)}$ هو كل المصادر التي تُحقق أن $g(x)\geq 0$ (تحت الجذر موجب أو 0).

ملاحظات وتوضيحات :

1. الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ تحصل على قيّم موجبة فقط.
2. الدالة التي تحت الجذر أي g(x) ستكون إما دالة خطية أو دالة تربيعية ، في الغالبية الساحقة من أسئلة البجروت.... ولإيجاد مجال تعريفها نحل المُتباينة $g(x)\geq 0$ التي إما أن تكون خطية أو تربيعية .....
3. إذا كانت الدالة التي تحت الجذر تربيعية ،إذاً مجال التعريف للدالة f هو **المجال الموجب** للدالة g(x) ونجده بواسطة رسم الدالة التربيعية .....

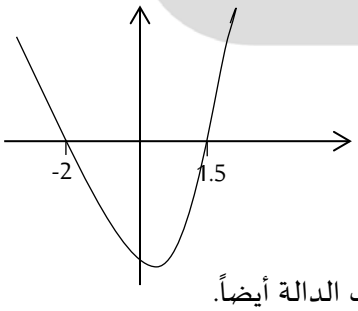
مثال:

مُعطى الدالة: $f(x)=\sqrt{2x^2-x-6}$. جد مجال تعريف الدالة وخطوط التقارُب المُعامدة للمحاور؟

الحل:

مجال تعريف الدالة بهذه الحالة هو كل x يُحقق أن: $2x^2-x-6\geq 0$.

لكي نحل هذه المُتباينة،نرسم الدالة التربيعية المُلائمة .....أي أولاً نجد جُذور الدالة ونُحدد نوع رأس الدالة التربيعية بحسب a ،ومن ثُم نرسم الدالة ونُحدد المجال الموجب .....



نحل المُعادلة التربيعية $2x^2-x-6=0$ ، نحصُل على حلين: $x_1=-2$ ، $x_2=1.5$

وبما أن $a=2$ أي موجب إذًا رأس الدالة سيكون מינימום.

وبالتالي الرسم البياني للدالة سيكون من الصورة المُبيّنة :

وحل المُتباينة $2x^2-x-6\geq 0$ هو المجال الموجب للدالة التربيعية .....

وبحسب الرسم المجال الموجب هو: $x<-2$ أو $x>1.5$. وهذا هو مجال تعريف الدالة أيضاً.

خطوط تقارب :

للدالة $f(x)=\sqrt{2x^2-x-6}$ لا يوجد خطوط تقارُب عامودية لكن رسمها البياني سيتألف من جُزئين

حقوق الطبع محفوظة لمعهد IQ - بسيخومتري وبجروت

حسب مجال التعريف أعلاه..... أي جزُء بالمجال $x < -2$ والآخر بالمجال $x > 1.5$.
وكذلك لا يوجد لها خطوط تقارُب أفقية لأنه عندما يقترب x إلى ما لا نهاية ، ستقترب قيمة الدالة إلى ما لا نهاية.....

دالة نسبية مع دالةجذر مُركبة

الدالة النسبية مع دالة جذر مُركبة مُمكن أن تكون واحدة من الصورتين التاليتين:

1. $f(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$ **أو** 2. $f(x)=\frac{\sqrt{g(x)}}{h(x)}$

مُلاحظة:

في الغالبية الساحقة من أسئلة البجروت، ستكون الدالة التي تحت الجذر إما دالة خطية أو دالة تربيعية ....

مجال تعريف الدالة في الحالة الأولى: $f(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$

مجال تعريف الدالة بهذه الحالة هو كل المصادر التي تُحقق أن : $h(x) > 0$.(أنتبه المقام لا يُمكن أن يكون 0)

في الحالة الثانية : $f(x)=\frac{\sqrt{g(x)}}{h(x)}$

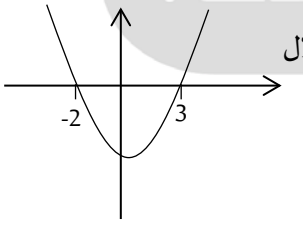
مجال تعريف الدالة بهذه الحالة يشمل شرطين مُدمجين: $\mathbf{g(x) \geq 0}$ **وأيضاً** $\mathbf{h(x) \neq 0}$

لأن البسط عبارة عن دالة جذر والجذر مُعرّف فقط لقيّم موجبة..... والمقام ممنوع أن يكون 0.

مثال1:

معطاة الدالة $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-x-6}}$ **جد مجال تعريف الدالة وخطوط التقارب للدالة ؟**

الحل:



مجال تعريف الدالة هو كل المصادر التي تُحقق أن $x^2-x-6>0$ ،وسنجده من خلال الرسم البياني للدالة الذي سيكون كما مبيّن:
والمجال الموجب هو $x>3$ **أو** $x<-2$ وهو أيضاً مجال تعريف الدالة.

خطوط التقارُب العمودية:

النُقاط الصفرية للمقام هي :$x=3$ أو $x=-2$ وإذا عوضنا $x=-2$ بالبسط سنحصُل على 0 ولذلك النُقطة $x=-2$ هي ثُقب للدالة وخط التقارب العامودي الثاني سيكون: $x=3$.

خطوط التقارُب الأُفُقيّة:

الدالة المُعطاة هي: $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-x-6}}$ ولكي نجد خطوط التقارُب الأفُقية سنكتب التعبير الذي تحت الجذر كالتالي: $x^2-x-6=x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2})$

ومن ثُم نُخرج X^2 خارج الجذر (تذكر أن $\sqrt{x^2}=|x|$) ولذلك التعبير في المقام سيُصبح:

$$\sqrt{x^2-x-6}=|x|\cdot\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2})}$$

وبالتالي يُمكن كتابة الدالة كالتالي :

$$f(x)=\frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{|x|}{x}\cdot\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2})}}=\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{|x|}{x}\cdot\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2})}}$$

وعندما يقترب x إلى $(+\infty)$ فأن التعابير التي داخل الدوائر ستقترب من الصفر، أما التعبير $\frac{|x|}{x}$ فإن قيمته ستكون 1 وبالتالي قيمة الدالة عندها ستقترب من:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{1\cdot\sqrt{1+0+0}}=1$$

إذاً عندما يقترب x إلى$(+\infty)$ فإن قيم الدالة ستقترب من 1 وبالتالي مُعادلة خط التقارب عندما يقترب x إلى $(+\infty)$ هي: y=1

عندما يقترب x إلى $(-\infty)$ فأن التعابير التي داخل الدوائر ستقترب من الصفر، أما التعبير $\frac{|x|}{x}$ ستكون قيمته 1- ،لأن البسط موجب دائماً والمقام بهذه الحالة سالب. وبالتالي قيمة الدالة عندها ستقترب من:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1+0}{-1\cdot\sqrt{1+0+0}}=-1$$

إذاً عندما يقترب x إلى$(-\infty)$ فإن قيم الدالة ستقترب من 1- وبالتالي مُعادلة خط التقارب عندما يقترب x إلى $(-\infty)$ هي $y=-1$.

مثال 3:

حقوق الطبع محفوظة لمعهد IQ - بسيخومتري وبجروت

معطاة الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{x^2-9}$ **؛جد مجال تعريف الدالة وخطوط التقارب المُعامدة للمحاور ؟**

الحل:

مجال تعريف الدالة بهذه الحالة يشمل شرطين مُدمجين:

الأول : التعبير تحت الجذر ليس سالباً أي $X+5\geq 0$ أي $X\geq -5$

الثاني : المقام لا يُساوي صفر ، أي $x^2-9\neq 0$ ..... أي $x\neq 3$ أو $x\neq -3$

ودمج هاذين الشرطين هو مجال تعريف الدالة :

بهذه الحالة مجال الدالة سيكون :

$$-5\leq x<-3 \quad \text{أو} \quad -3<x<3 \quad \text{أو} \quad x>3$$

خطوط التقارب العامودية هي:

$$x=3 \quad \text{أو} \quad x=-3$$

(انتبه إلى أن البسط لا يُساوي صفر في $x=3$ أو $x=-3$)

خطوط التقارب الأُفُقية:

عندما يقترب x إلى $(+\infty)$ فإن المقام يقترب إلى ما لا نهاية أسرع من البسط ولذلك الدالة ستقترب من الصفر.... ولذلك

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

ومُعادلة خط التقارُب الأُفقي عندما يقترب x إلى $(+\infty)$ هي $y=0$.

الدالة غير مُعرفة في $(-\infty)$ ولذلك لا حاجة لفحص خط التقارب هناك....

مَكْسِم قدراتك.

دالة نسبية مُثلثية مع جذور

التعامل مع الدوال المُثلثية يختلف عن نمط التعامُل مع الدوال الأُخرى في كل ما يتعلق بإيجاد مجال تعريف الدالة ، ومن خلال الأمثلة التالية سنوضح كيف نتعامل مع مجال تعريف الدالة في الدوال المُثلثية.....

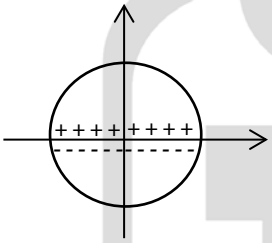
مثال1 :

جد مجال تعريف الدالة $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ في المجال $0<x<2\pi$ ؟

الحل:

الدالة ستكون مُعرّفة لكل x يُحقق $\sin x>0$ في المجال $0<x<2\pi$

ولإيجاد هذا المجال يُمكننا الأستعانة بدائرة الوحدة وتحديد المجال الموجب لـ $\sin x>0$ بحسبها



بحسب دائرة الوحدة وتعريف دالة الـ sin فإن الدالة تكون موجَبَة بالرُبع الأول والرُبع الثاني، ولذلك الدالة f(x) ستكون مُعرفة لكل x بالمجال :

$$0<x<\pi .$$

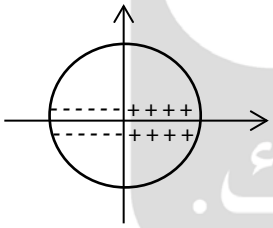
مثال 2 :

جد مجال تعريف الدالة $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ في المجال $0<x<2\pi$ ؟

الحل:

الدالة ستكون مُعرّفة لكل x يُحقق $\cos x>0$ في المجال $0<x<2\pi$

ولإيجاد هذا المجال يُمكننا الأستعانة بدائرة الوحدة وتحديد المجال الموجب لـ $\cos x>0$ بحسبها



بحسب دائرة الوحدة وتعريف دالة الـ cos فإن الدالة تكون موجَبَة بالرُبع الأول والرُبع الرابع، ولذلك الدالة f(x) ستكون مُعرفة لكل x بالمجال :

$$0<x<\frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2}<x<2\pi .$$

مثال 3 :

جد مجال تعريف الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{\cos x}}{0.5-\sin x}$ في المجال $0<x<3\pi$ ؟

الحل :

بهذه الحالة مجال تعريف الدالة عبارة عن دمج لشرطين :

الأول هو: $\cos x\geq 0$ (التعبير تحت الجذر ليس سالب) **والثاني هو** $0.5-\sin x\neq 0$ (أي المقام لا يُساوي 0):

بحسب دائرة الوحدة والشرح من المثال السابق فإن $\cos x\geq 0$ لكل x بالمجال :

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}.$$

بالنسبة للشرط الثاني فإن:

0 =0.5-sin x عندما يتحقق: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ **أو** $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

وفي المجال المُعطى فإن هذا يتحقق في النُقط التالية،وفيها تكون الدالة غير مُعرفة:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, (k=0) \text{ أو } x_2 = \frac{5\pi}{6}, (k=0)$$

$$x_3 = \frac{13\pi}{6}, (k=1) \text{ أو } x_2 = \frac{17\pi}{6}, (k=1)$$

أذا مجال تعريف الدالة هو المجال الذي يدمج بين الشرطين ،وهذا المجال هو:

$$0 \le x < \frac{\pi}{6} \text{ أو } \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2} \le x < \frac{17\pi}{6} \text{ أو } \frac{17\pi}{6} < x \le \frac{5\pi}{2}$$

ومعنى هذا أن الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{0.5 - \sin x}$ في المجال $0< x< 3\pi$ سيتألف من 4 أجزاء التي فيها تكون الدالة مُعرّفة

مَكْسِم قدراتك.

حقوق الطبع محفوظة لمعهد IQ - بسيخومتري وبجروت