العلاقة بين الدالة ومقلوبها

في هذا الفصل سنُعالج العلاقة بين الدالة f(x) و مقلوب الدالة أي الدالة $\frac{1}{f(x)}$. سنشرح العلاقة بين الرسم البياني لـ f(x) والرسم البياني لـ $\frac{1}{f(x)}$ ، وأيضاً العلاقة بين التمثيل الجبري للدالتين.

أن الأسئلة بخصوص العلاقة بين الدالة ومقلوبها قد تظهر في قسم بحث الدوال في بجروت 5/4 وحدات.

1.المجال الموجب والسالب:

للدالة f(x) ولمقلوبها $\frac{1}{f(x)}$ ، يوجد نفس المجال الموجب ونفس المجال السالب.

2.المجال التصاعُدية والتنازُلية:

المجال التصاعدي للدالة f(x) هو مجال تنازلي لمقلوب لدالة $\frac{1}{f(x)}$ والعكس صحيح.

المجال التنازلي للدالة f(x) هو مجال تصاعدي لمقلوب لدالة : $\frac{1}{f(x)}$ ، والعكس صحيح.

3.النقاط الصفرية:

النقاط الصفرية للدالة f(x) ستكون نقاط فيها مقلوب الدالة، $\frac{1}{f(x)}$ غير معرفة ،لأنه عندها سيكون المقام صفر وهذه النقاط إما أن تكون "**ثُقب**" **أو** " **خطوط ثقارُب** ".

4. النقاط القصوى:

أ. أذا كانت النُقطة x_1 نُقطة نهاية عُظمى **(מקסימום)** للدالة f(x) (وليست نُقطة صفرية) إذاً x_1 ستكون نُقطة نهاية صُغرى**(מינימום)** لمقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$ والعكس صحيح.

ب. أذا كانت النُقطة x_2 نُقطة نهاية صُغرى**(מינימום)** للدالة f(x) (وليست نُقطة صفرية) إذاً x_2 هي نُقطة نهاية عُظمى**(מקסימום)** لمقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$ والعكس صحيح.

5. مجال التعريف:

1. في كل نُقطة تكون فيها الدالة **f(x) غير مُعرّفة** إذا مقلوب الدالة، $\frac{1}{f(x)}$ ،تكون **غير مُعرفة** أيضاً ؛باستثناء أطراف مجال تعريف الدالة f(x) ، إذ عندها يجب أن نفحص كيف ستتصرف $\frac{1}{f(x)}$ هُناك؛فمثلاً إذا كانت الدالة f(x) تقترب من ما لا نهاية ،فعندها $g(x)=\frac{1}{f(x)}=0$ ..... سنوضح ذلك من خلال الأمثلة.

6. تساوي الدالة ومقلوبها:

تتساوى الدالة ومقلوبها في النقاط التي تُحقق أن f(x)=g(x)=1 أو f(x)=g(x)=-1 وعندها يتقاطع الرسمان.(لماذا؟)

7. خطوط التقارُب الأُفقية:

حقوق الطبع محفوظة لمعهد IQ-بسيخومتري وبجروت

إذا كان المستقيم y=a هو خط تقارُب أفقي للدالة f(x) ،إذًا المستقيم $y=\frac{1}{a}$ هو خط تقارُب أفقي لـ $\frac{1}{f(x)}$.

هذه هي النقاط التي توضح العلاقة بين الدالة ومقلوبها من الناحية البيانية والجبرية أيضاً .

أمثلة وشروحات:

<u>مثال 1:</u>

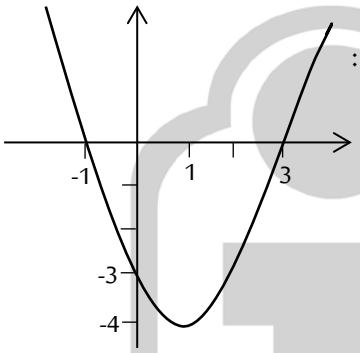
أرسم في نفس هيئة المحاور الرسم البياني للدالة $f(x)=x^2-2x-3$ والرسم البياني لمقلوب الدالة، $\frac{1}{f(x)}$ ؟

الحل :

الدالة المُعطاة هي دالة تربيعية ومن السهل رسمها . نقاطها الصفرية هي :

$x_1=3$ و $x_2=-1$.إحداثيات نُقطة رأسها هي (1,-4) **(مينيمום)**

كما وتقطع الدالة f(x) المحور y بالنُقطة(0,-3) وبالتالي رسمها كما مُبيّن.



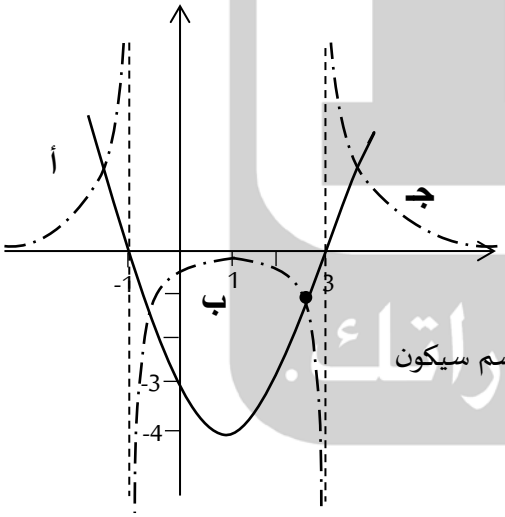
الآن نرسم مقلوب الدالة، اي الدالة التي تمثيلها الجبري هو:

$$g(x)=\frac{1}{x^2-2x+3}$$

نشرح كيف نرسم مقلوب الدالة:

1. النُقاط الصفرية للدالة f(x) هي نقاط تكون فيها الدالة g(x) غير مُعرّفة.أي أن g(x) غير مُعرفّة بالنُقاط **$x_1=3$ و $x_2=-1$.**

وهذه النقاط مُمكن أن تكون **" ثُقب" ،للدالة أو أن يكون هنالك خط تقارب** للدالة،وبهذه الحالة سيكون للدالة خطوط تقارب بهذه النقاط.....لأنها لا تُحقق شروط " ثُقب "



2.الدالةf(x) موجبة وتنازُلية في المجال x<-1 ولذلك مقلوب الدالة أي الدالة g(x) ستكون تصاعُدية وموجبة في هذا المجال ولذلك الرسم سيكون كما مُبين بالجزء المُشار إليه بالحرف" أ "على الرسم.

3. في المجال $3>x>-1$ الدالة تتصرف كالتالي :

أ. في المجال $1>x>-1$ الدالةf(x) سالبة وتنازُلية لذلك مقلوب الدالة،أي g(x) ،ستكون سالبة وتصاعُدية.

ب. النُقطة **x=1** هي نُقطة نهاية صُغرى **(مينيمום)** <u>للدالة f(x)</u> لذلك ستكون نقطة <u>نهاية عُظمى لـ g(x)</u>

وسيتحقق : $g(1)=\frac{1}{f(1)}=\frac{-1}{4}$. أي النُقطة $(1,\frac{-1}{4})$ هي **(مكسيمום)** لـ g(x).

جـ. في المجال $3>x>1$ الدالة f(x) سالبة وتصاعُدية لذلك مقلوب الدالةg(x) ستكون سالبة وتنازُلية.

د. كذلك $g(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{-1}{3}$ **.أي الدالة** g(x) تقطع المحور y بالنُقطة $(1,\frac{-1}{3})$ ولذلك رسم مقلوب الدالة f(x) ، أي الدالة g(x) ،سيكون في المجال $3>x>-1$ (بحسب الشرح بالبنود أ- د) كما مُبين بالجزء

المشار إليه بالحرف "ب" على الرسم.

4. الدالة f(x) موجبة وتصاعُدية في المجال $x<-1$ ولذلك مقلوب الدالة ،أي الدالة g(x) ،ستكون تنازُلية وموجبة ولذلك ستكون كما مُبين بالجزء المُشار إليه بالحرف " جـ " على الرسم.

مثال 2 :

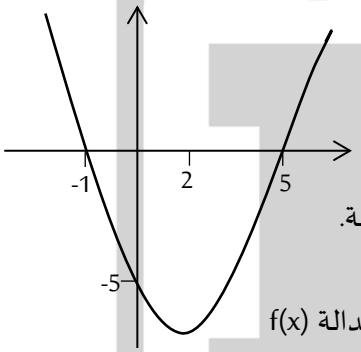
مُعطاة الدالة : $f(x)=\dfrac{x+6}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

أ. ما هو مجال تعريف الدالة f(x) ؟

ب. ما هو مجال تعريف الدالة $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ ؟

جـ أرسم في نفس هيئة المحاور الرسم البياني للدالة f(x)= ،والرسم البياني للدالة، $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ ؟

الحل :



أ. مجال تعريف الدالة f هو كل المصادر التي تُحقق أن $x^2-4x-5>0$.

وهذا المجال هو المجال المُوجب للدالة التربيعية .....

سنجده من خلال الرسم البياني للدالة الذي سيكون كما مبيّن:

والمجال الموجب هو $x>5$ أو $x<-1$ وهو أيضاً مجال تعريف الدالة.

مُلاحظة:

في النقاط $x_1=5$ و $x_2=-1$ قيمة التعبير تحت الجذر هي 0.وعندها الدالة f(x) ستقترب -بجوار النقطة $x_1=5$ -من $(+\infty)$ ،لأن البسط سيكون موجب في $x_1=5$.

وبجوار النقطة $x_2=-1$ ستقترب الدالة f(x) إلى $(+\infty)$لأن البسط سيكون موجب في $x_2=-1$ أيضاً.

ب. قاعدة تناظر الدالة $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ ، ستكون: $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x+6}$

ولكي نجد مجال تعريف الدالة $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ يجب أن نأخُذ بعين الأعتبار مجال تعريف الدالة f(x) لأنه بحسب التمثيل الجبري للدالة g(x) ، فإن مجال تعريفها هو $x\neq-6$ فقط ،ولكن بما أن مجال تَعريف الدالة g(x) مُرتبط بمجال تعريف الدالة f(x) لذلك يجب أن نأخُذه بعين الأعتبار.فمثلاً ،بما أن الدالة f(x) غير مُعرفة في النقطة $x=0$.إذ أنّ قيمة التعبير تحت الجذر سالبة في $x=0$ لذلك أيضاً

$$g(0)=\frac{1}{f(0)}=\text{فـرّعُمري غ}$$

بِحسب التمثيل الجبري للدالة g(x) فهي غير مُعرفة في $x=-6$ ؛كذلك هي غير مُعرفة في المجال الذي فيه f(x) غير مُعرفة أي هي غير مُعَرّفة أيضاً لكل x بحيثُ أن $x>5$ أو $x<-1$. ولكن علينا أن نفحص كيف تتصرف الدالة g(x) في أطراف مجال تعريف الدالة f(x) ،أي كيف تتصرف في النقاط $x=5$ و$x=-1$

$$f(5)=\frac{5+6}{\sqrt{5^2-4\cdot5-5}}=\frac{11}{0}\to\infty$$

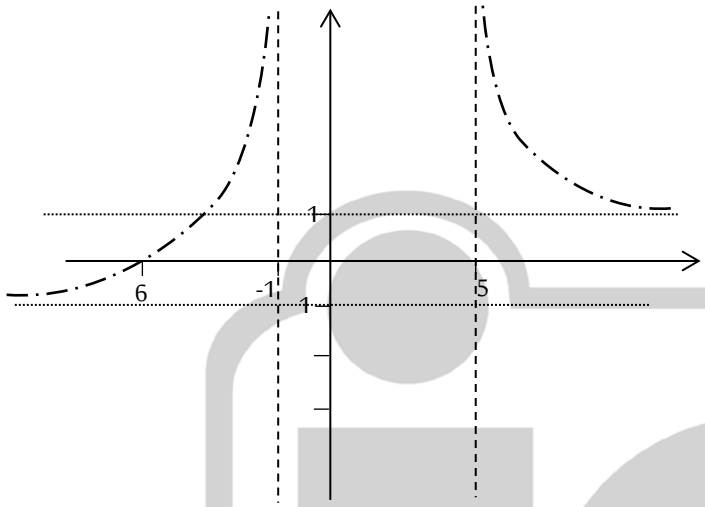
وبالتالي g(5) عبارة عن: $g(5)=\frac{1}{f(5)}\to\frac{1}{\infty}\to 0$

أي أن قيمة الدالة في g(x) في x = 5 مُعرّفة ويتحقق أن: g(5)=0 .وكذلك الأمر بالنسبة لـ x = -1 ويتحقق:g(-1)=0

أذًا الدالةg(x) مُعَرّفة في أطراف مجال تعريف الدالة f(x) ،ومجال تعريف الدالة g(x) هو :

$x\le 5$ أو $-1\le x>-6$ أو $x<-6$.

جـ . الرسم البياني للدالة f(x) (بعد بحث الدالة) سيكون كما مُبين:



شرح وتوضيحات:

1. للدالة مُعَرّفة بالمجال:

$x>5$ أو $x<-1$ (خطوط تقارُب)

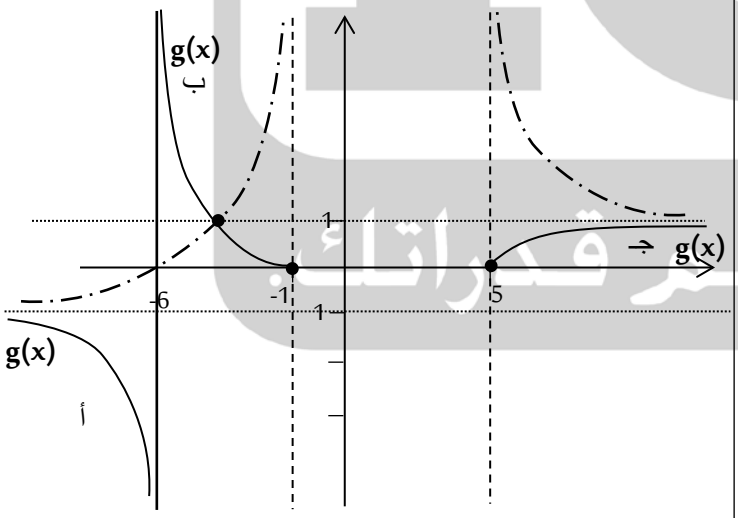
2. للدالة لا يوجد نُقاط قُصوى. ولذلك نفحص هل الدالة تنازُلية أو تصاعُدية في كل جُزء من مجال تعريفها؛وذلك بواسطة تعويض مصدر ضمن مجال التعريف بالمشتقة وفحص اشارة المُشتقة..... .

3. للدالة خطّي تقارب أُفقية:

Y=1 عندما $x\to+\infty$

Y=-1 عندما $x\to-\infty$

الرسم البياني لمقلوب الدالة: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$



شرح وتوضيحات:

1. الدالة g(x) مُعرفة بالمجال:

$x\le 5$ أو $-1\le x>-6$ أو $x<-6$.

$x=-6$ هو خط تقارُب للدالة.

2. في أطراف مجال تعريف الدالة f(x) يتحقق:

g(-1)=0 و g(5)=0

3.خطوط التقارُب الأُفقية للدالة g بهذه الحال هي نفس خطوط تقارب أفقية للدالة f .(لماذا؟)

4.العلاقة بين المجالات التصاعُدية والتنازلية والمجالات الموجبة والسالبة للدالتين ،قد شُرحت سابقاً.....

5.الدالتان تتقاطعان في النقطة التي تُحقق:

g(x)= f(x)= 1

حقوق الطبع محفوظة لمعهد IQ-بسيخومتري وبجروت