أسس الجبر (د)

عزيزي الطالب:

هذه الملف هو الملف الثالث من المواد الاساسية في الجبر التي من المفروض ان يجيد الطالب التعامل معها قبل البدء بالدورة.

الملف يشمل شرحاً شاملاً لمواضيع مركزية في الجبر وهي :

1. **قوانين القوى**
2. **قوانين الجذور**
3. **التحليل الى العوامل**
4. **قوانين الضرب المختصر**
5. **تبسيط صور الاعداد**
6. **تغيير موضوع المعادلة**

هذه مواضيع مهمة ومركزية جداً في الجبر ويجب على كل طالب ان يُسيطر على هذه المواد وأن يتمكن من تطبيق مهارات الحل المعروضة في كل موضوع لكي تكون الاستفادة من الدورة قصوى.

باحترام

طاقم البحث والتطوير - معهد IQ

القوى والجذور

تعريفات:

القوى:

ليكن n عدد صحيح و A عدد بحيث $A\neq0$, A^n=العدد A مضروب بنفسه n مرات.

أي $\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{\text{مرات } n}=A^n$. A يسمى "**الأساس**" و n يسمى "**القوى**".

أمثلة:

$(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125$

$7^2=(7)(7)=49$

قوانين القوى

القانون	مثال
(1) $A^m\cdot A^n=A^{m+n}$	$5^3\cdot5^4=5^{3+4}=5^7$
(2) $\frac{A^m}{A^n}=A^{m-n}$	$\frac{4^5}{4^2}=4^{5-2}=4^3$

ومن هذا القانون بإمكاننا أن نستنتج القانونين التاليين :

(أ) $A^{-n}=\frac{1}{A^n}$, $7^{-3}=\frac{1}{7^3}$, $5^4=\frac{1}{5^{-4}}$

(ب) $A^0=1$ (لكل $A\neq0$) , $7^0=4^0=(0.5)^0=1$

القانون	مثال
(3) $(A^m)^n=A^{m\cdot n}$	$(6^2)^4=6^{2\cdot4}=6^8$
(4) $(A\cdot B)^m=A^m\cdot B^m$	$(3\cdot5)^4=3^4\cdot5^4$
(5) $\left(\frac{A}{B}\right)^m=\frac{A^m}{B^m}$	$\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{4^2}{7^2}$

أحفظ جدول القوى التالي:

$1^2=1$
$2^2=4$
$3^2=9$
$4^2=16$
$5^2=25$
$6^2=36$
$7^2=49$
$8^2=64$
$9^2=81$
$10^2=100$

$11^2=121$
$12^2=144$
$13^2=169$
$14^2=196$
$15^2=225$
$16^2=256$
$17^2=289$
$18^2=324$
$19^2=361$
$20^2=400$

$2^3=8$
$3^3=27$
$4^3=64$
$5^3=125$

$2^4=16$
$3^4=81$
$4^4=256$
$5^4=625$

$2^5=32$
$2^6=64$
$2^7=128$
$2^8=256$

<u>تمارين في قوانين القوى:</u>

1.بسّط لأبسط صورة ممكنة مستعينًا بقوانين القوى ؟

(1) $9^3\cdot 9^5=$ (2) $8^5\cdot 8^{-2}=$ (3) $\frac{6^7}{6^3}=$

(4) $\frac{3^8}{3^{-4}}=$ (5) $\left(8^2\right)^3=$ (6) $\left(5^4\right)^{-2}=$

(7) $\frac{10^3\cdot(10^2)^4}{10^7}=$ (8) $\frac{16^5}{4^8}=$ (9) $\frac{(8)^4}{2^9}=$

(10) $A^3\cdot B^3=$ (11) $A^{3b}\cdot A^{-2b}=$ (12) $\frac{A^5}{B^3}\cdot\left(\frac{B}{A}\right)^{-2}=$

(13) $\left(\frac{A}{B}\right)^y\cdot\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{y}}=$ (14) $\left(\frac{A}{B}\right)^3\cdot\frac{B^5}{A^x}=$ (15) $\left(4^6\right)^3\cdot 16^{-5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=$

2..بسّط لأبسط صورة ممكنة مستعينًا بقوانين القوى ؟

1) $a^3 \cdot a^4 = ?$

2) $a^5 \cdot a^{-2} = ?$

3) $a^4 \cdot a^0 = ?$

4) $\frac{a^5}{a^3} = ?$

5) $\frac{a^4}{a} = ?$

6) $\frac{a^8}{a^{10}} = ?$

7) $\frac{a^9}{a^{13}} = ?$

8) $\frac{a^2}{a^{-3}} = ?$

9) $\frac{(a^2)^3}{a^4} = ?$

10) $\frac{(a^5)^3}{a^{-3}} = ?$

11) $\frac{(a^7)^4}{a^{-4}} = ?$

12) $(a^4)^2 \cdot a^{-3} = ?$

---

3. بسط بالاعتماد على قوانين القوى ؟

1) $\frac{3^2 \cdot 2^5 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2} =$

2) $\frac{(3^2)^3 \cdot (4^2)^4 \cdot 5^4}{5^2 \cdot 3^6 \cdot 4^5} =$

3) $\frac{(3 \cdot 4)^5 \cdot (2^3)^4}{(3 \cdot 2)^5 \cdot 2^7 \cdot 4^5} =$

4) $\frac{(a^3)^8 \cdot (b^5)^4}{(a^4)^6 \cdot (b^{10})^2} =$

5) $\frac{(a^4)^8 \cdot (b^3)^7}{a^4 \cdot a^8 \cdot b^3 \cdot b^7} =$

6) $\frac{(5m^3 \cdot c^4)^4}{m^8 \cdot c^{20}} =$

7) $\frac{-12a^5 \cdot b^2}{m^4} : \frac{6a^3b^2}{m^5} =$

الحلول:

حلول سؤال 1

(1) $9^3 \cdot 9^5 = 9^{3+5} = 9^8$

(2) $8^5 \cdot 8^{-2} = 8^{5+(-2)} = 8^3$

(3) $\frac{6^7}{6^3} = 6^{7-3} = 6^4$

(4) $\frac{3^8}{3^{-4}} = 3^{8-(-4)} = 3^{8+4} = 3^{12}$

(5) $(8^2)^3 = 8^{2\cdot 3} = 8^6$

(6) $(5^4)^{-2} = 5^{4\cdot(-2)} = 5^{-8} = \frac{1}{5^8}$

(7) $\frac{10^3 \cdot (10^2)^4}{10^7} = \frac{10^3 \cdot 10^8}{10^7} = 10^{11-7} = 10^4$

(8) $\frac{16^5}{4^8} = \frac{(4\cdot 4)^5}{4^8} = \frac{4^5 \cdot 4^5}{4^8} = 4^{5+5-8} = 4^2 = 16$

(9) $\frac{(8)^4}{2^9} = \frac{(2^3)^4}{2^9} = \frac{2^{3\cdot 4}}{2^9} = 2^{12-9} = 2^3 = 8$

(10) $A^3 \cdot B^3 = (A \cdot B)^3$

(11) $A^{3b} \cdot A^{-2b} = A^{3b+(-2b)} = A^b$

(12) $\frac{A^5}{B^3} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{-2} = \frac{A^5}{B^3} \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^5}{B^3} \cdot \frac{A^2}{B^2} = \frac{A^{5+2}}{B^{3+2}} = \frac{A^7}{B^5}$

(13) $\left(\frac{A}{B}\right)^y \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\frac{A}{B}\right)^y \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{y-\frac{1}{y}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{y^2-1}{y}}$

(14) $\left(\frac{A}{B}\right)^3 \cdot \frac{B^5}{A^x} = \frac{A^3}{B^3} \cdot \frac{B^5}{A^x} = A^{3-x} \cdot B^{5-3} = A^{3-x} \cdot B^2$

(15) $(4^6)^3 \cdot 16^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4^{6\cdot 3} \cdot (4^2)^{-5} \cdot (4^{-1})^2 = 4^{18} \cdot 4^{-10} \cdot 4^{-2} = 4^{18-10-2} = 4^6 = (4^2)^3$

حلول سؤال 2

1. $a^3 \cdot a^4 = a^{4+3} = a^7$

2. $a^5 \cdot a^{-2} = a^{5+(-2)} = a^3$

3. $a^4 \cdot a^0 = a^{4+0} = a^4$

4. $\dfrac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

5. $\dfrac{a^4}{a} = a^{4-1} = a^3$

6. $\dfrac{a^8}{a^{10}} = a^{8-10} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

7) $\dfrac{a^9}{a^{13}} = a^{9-13} = a^{-4} = \dfrac{1}{a^4}$

8) $\dfrac{a^2}{a^{-3}} = a^{2-(-3)} = a^5$

9) $\dfrac{(a^2)^3}{a^4} = \dfrac{a^{2\cdot 3}}{a^4} = \dfrac{a^6}{a^4} = a^{6-4} = a^2$

10) $\dfrac{(a^5)^3}{a^{-3}} = \dfrac{a^{5\cdot 3}}{a^{-3}} = a^{15-(-3)} = a^{18}$

11) $\dfrac{(a^7)^4}{a^{-4}} = \dfrac{a^{7\cdot 4}}{a^{-4}} = a^{28-(-4)} = a^{32}$

12) $(a^4)^2 \cdot a^{-3} = a^{4\cdot 2-3} = a^{8-3} = a^5$

حلول سؤال 3

1. $\dfrac{3^2 \cdot 2^5 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 3^{2-4} \cdot 2^{5-4} \cdot 5^{4-2} = 3^{-2} \cdot 2^1 \cdot 5^2 = \dfrac{2^1 \cdot 5^2}{3^2} = \dfrac{2 \cdot 25}{9} = \dfrac{50}{9}$

2. $\dfrac{(3^2)^3 \cdot (4^2)^4 \cdot 5^4}{5^2 \cdot 3^6 \cdot 4^5} = \dfrac{3^{2.3} \cdot 4^{2.4} \cdot 5^4}{5^2 \cdot 3^6 \cdot 4^5} = 3^{6-6} \cdot 4^{8-5} \cdot 5^{4-2} = 3^0 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 4^3 \cdot 5^2$

3. $\dfrac{(3.4)^5 \cdot (2^3)^4}{(3 \cdot 2)^5 \cdot 2^7 \cdot 4^5} = \dfrac{3^5.4^5.2^{3.4}}{3^5 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot 4^5} = \dfrac{3^5 \cdot 4^5 \cdot 2^{12}}{3^5 \cdot 2^{12} \cdot 4^5} 3^{5-5} \cdot 4^{5-5} \cdot 2^{12-12} = 3^0 \cdot 4^0 \cdot 2^0 = 1$

4. $\dfrac{(a^3)^8 \cdot (b^5)^4}{(a^4)^6 \cdot (b^{10})^2} = \dfrac{a^{3\cdot 8} b^{5\cdot 4}}{a^{4\cdot 6} \cdot b^{10\cdot 2}} = \dfrac{a^{24} \cdot b^{20}}{a^{24} \cdot b^{20}} = a^{24-24} \cdot b^{20-20} = a^0 \cdot b^0 = 1$

5. $\dfrac{(a^4)^8 \cdot (b^3)^7}{a^4 \cdot a^8 \cdot b^3 \cdot b^7} = \dfrac{a^{8.4} \cdot b^{3.7}}{a^{4+8} \cdot b^{3+7}} = \dfrac{a^{24} \cdot b^{21}}{a^{12} \cdot b^{10}} = a^{24-12} \cdot b^{21-10} = a^{12} \cdot b^{11}$

6. $\dfrac{(5m^3 \cdot c^4)^4}{m^8 \cdot c^{20}} = \dfrac{5^4 m^{3\cdot 4} \cdot c^{4\cdot 4}}{m^8 \cdot c^{20}} = \dfrac{5^4 \cdot m^{12} \cdot c^{16}}{m^8 \cdot c^{20}} = 5^4 \cdot m^{12-8} \cdot c^{16-20} = 5^4 \cdot m^4 \cdot c^{-4} = \dfrac{5^4 \cdot m^4}{c^4} = (\dfrac{5m}{c})^4$

7. $\dfrac{-12a^5 \cdot b^2}{m^4} : \dfrac{6a^3 \cdot b^2}{m^5} = \dfrac{-12a^5 \cdot b^2}{m^4} \cdot \dfrac{m^5}{6a^3 \cdot b^2} = -\dfrac{12a^5 \cdot b^2 m^5}{6a^3 \cdot b^2 \cdot m^4} = -2 \cdot a^{5-3} \cdot b^{2-2} \cdot m^{5-4}$
$= 2a^2 \cdot b^0 \cdot m^1 = 2a^2 \cdot m$

الجذر:

ليكن n عدد صحيح إذاً $\sqrt[n]{A}$ هو عدد مثل b والذي يحقق $b^n=A$

إذاً: إذا كان $b^n=A \Leftrightarrow b=\sqrt[n]{A}$.

قوانين الجذور

القانون		مثال
(1) $\sqrt[n]{A}=A^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{A^m}=A^{\frac{m}{n}}$	$\longrightarrow$	$\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[7]{5^3}=5^{\frac{3}{7}}$
(2) $\sqrt[n]{A\cdot B}=\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}$	$\longrightarrow$	$\sqrt[4]{6\cdot 3}=\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[4]{3}$
(3) $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$	$\longrightarrow$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$

ملاحظات وتوضيحات:

1.من جدول القوى يمكن استنتاج الجذور الملائمة. فمثلاً: بما أن $125=5^3$ إذاً نستنتج ان: $5=\sqrt[3]{125}$

2. القوى والجذور يمكن اعتبارهم عمليتين عكسيتين (مع بعض التحفظات)

أي: $128=2^7 \Leftrightarrow \sqrt[7]{128}=2$

3- $A^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{A}$ مثلاً $64^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}$

4- في البسيخومتري نأخذ دائماً الجذر الموجب في الحالات التي فيها هناك جذرين فمثلاً $\sqrt[4]{81}$ هو 3 و 3- ولكن في امتحان البسيخومتري نأخذ فقط 3+. ونأخذ الجذر السالب فقط في الحالات التي مكتوب فيها بشكل واضح $\pm\sqrt[4]{81}$.

3- اذا لم يكن عدد فوق اشارة الجذر، $\sqrt{\ }$، فالمقصود $\sqrt[2]{\ }$ أي $\sqrt{9}=\sqrt[2]{9}=3$

4.قوى كسرية

$A^{\frac{m}{n}}$ بحيث n, m اعداد صحيحة و $A\neq 0$ يحقق: $A^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{A^m}$

امثلة:

$$1)\ 4^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{4^3}=\sqrt{64}=8$$

$$2)\ 8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$$

تمارين في قوانين الجذور

1. بسّط لأبسط صورة مستعينًا بقوانين الجذور والقوى :-

(1) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 2^4}$　(2) $\sqrt[7]{3^6 \cdot 81^2}$　(3) $\sqrt{\dfrac{9^2}{3^4}}$

(4) $\sqrt[3]{8^6}$　(5) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$　(6) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

(7) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^{12}}}$　(8) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[5]{2}}$　(9) $\sqrt[9]{27} \cdot \sqrt[3]{3}$

(10) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^2}}$　(11) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^4}}$

---

2. **جد دون استعمال الآلة الحاسبة وبالاعتماد على قوانين الجذور قيمة العمليات الحسابية التالية ؟**

1) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = ?$　2) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{4} = ?$　3) $\sqrt{\dfrac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = ?$　4) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}} = ?$

5) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = ?$　6) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}} \cdot \sqrt{9} = ?$　7) $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = ?$　8) $\dfrac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{2000}} = ?$

9) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = ?$　10) $\dfrac{\sqrt{600}}{\sqrt{6}} = ?$　11) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = ?$　12) $\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} = ?$

13) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = ?$　14) $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} = ?$　15) $\dfrac{\sqrt[5]{-96}}{\sqrt[5]{3}} = ?$

حلول تمارين في قوانين الجذور

حلول سؤال 1

(1) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{2^9} = \left(2^9\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$

(2) $\sqrt[7]{3^6 \cdot 81^2} = \sqrt[7]{3^6 \cdot \left(3^4\right)^2} = \sqrt[7]{3^6 \cdot 3^8} = \sqrt[7]{3^{6+8}} = \sqrt[7]{3^{14}} = 3^{\frac{14}{7}} = 3^2 = 9$

(3) $\sqrt{\frac{9^2}{3^4}} = \sqrt{\frac{\left(3^2\right)^2}{3^4}} = \sqrt{\frac{3^4}{3^4}} = \sqrt{1} = 1$

(4) $\sqrt[3]{8^6} = 8^{\frac{6}{3}} = 8^2 = 64$

(5) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2 \cdot 16} = \sqrt[5]{32} = 2$

(6) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$

(7) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^{12}}} = \sqrt[6\cdot 4]{x^{12}} = \sqrt[24]{x^{12}} = x^{\frac{12}{24}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

(8) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2^5}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{5}}} = 2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{25}{20}-\frac{4}{20}} = 2^{\frac{21}{20}} = \sqrt[20]{2^{21}}$

(9) $\sqrt[9]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[9]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{3}{9}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

(10) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^2}} = \sqrt[3\cdot 4]{x^2} = \sqrt[12]{x^2} = x^{\frac{2}{12}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

(11) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[3\cdot 5]{x^4} = \sqrt[15]{x^4} = x^{\frac{4}{15}}$

حلول سؤال 2

1. $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}=4\cdot3=12$

2. $\sqrt{\frac{1}{4}}.\sqrt{4}=\frac{1}{2}\cdot2=1$

3. $\sqrt{\frac{1}{9}}.\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

4. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}=\sqrt[3]{\frac{3}{24}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$

5. $\sqrt{49}\cdot\sqrt{100}=7\cdot10=70$

6. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{9}=-\frac{1}{2}\cdot3=-\frac{3}{2}=-1\frac{1}{2}$

7. $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$

8. $\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{2000}}=\sqrt[3]{\frac{-2}{2000}}=\sqrt[3]{\frac{-1}{1000}}=-\frac{1}{10}$

9. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{72}{8}}=\sqrt{9}=3$

10. $\frac{\sqrt{600}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{600}{6}}=\sqrt{100}=10$

11. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\sqrt{25}=5$

12. $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\frac{162}{2}}=\sqrt[4]{81}=3$

13. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$

14. $\frac{\sqrt{250}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{250}{2}}=\sqrt{125}=5$

15. $\frac{\sqrt[5]{-96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{\frac{-96}{3}}=\sqrt[5]{-32}=-2$

إخراج عدد خارج جذر

لإخراج عدد خارج جذر، يجب أن نكتب الجذر كحاصل ضرب عددين بحيث إحداهما يمكن كتابته كعدد مرفوع لقوى تساوي الجذر.

مثال: $\sqrt[4]{162}=\sqrt[4]{81\cdot2}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{2}=3\cdot\sqrt[4]{2}$

إدخال عدد إلى داخل جذر

لإدخال عدد داخل جذر (عندما يكون العدد مضروب بالجذر) يجب أن نرفع العدد لقوى مساوٍ للجذر ثم ندخله إلى داخل الجذر ونضربه بالعدد الذي داخل الجذر.

مثال: $4\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{64\cdot5}=\sqrt[3]{320}$

تمارين أضافية في قوانين الجذور

1. أدخل العدد خارج الجذر إلى داخل الجذر؟

(1) $3\sqrt{3}$ (2) $3\cdot\sqrt[3]{5}$ (3) $2\sqrt[4]{9}$

(4) $5\sqrt[3]{2}$ (5) $8\cdot\sqrt{2}$ (6) $2\cdot\sqrt[5]{9}$

---

2. أخرج أكبر عدد صحيح ممكن خارج الجذر؟

(1) $\sqrt{200}$ (2) $\sqrt{72}$ (3) $\sqrt[4]{48}$

(4) $\sqrt[5]{-64}$ (5) $\sqrt[3]{-3000}$

حلول تمرين 1

1. $3\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3^2\cdot 3}=\sqrt{9\cdot 3}=\sqrt{27}$

2. $3\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{3^3\cdot 5}=\sqrt[3]{27\cdot 5}=\sqrt[3]{135}$

3. $2\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{2^4\cdot 9}=\sqrt[4]{16\cdot 9}=\sqrt[4]{144}$

4. $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=\sqrt[3]{250}$

5. $8\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8^2\cdot 2}=\sqrt{64\cdot 2}=\sqrt{128}$

6. $2\cdot\sqrt[5]{9}=\sqrt[5]{2^5\cdot 9}=\sqrt[5]{32\cdot 9}=\sqrt[5]{288}$

حلول تمرين 5

1. $\sqrt{200}=\sqrt{100\cdot 2}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{2}=10\cdot\sqrt{2}$

2. $\sqrt{72}=\sqrt{9\cdot 8}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}=3\cdot\sqrt{8}$

3. $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=2\cdot\sqrt[4]{3}$

4. $\sqrt[5]{-64}=\sqrt[5]{-32\cdot 2}=\sqrt[5]{-32}\cdot\sqrt[5]{2}=-2\cdot\sqrt[5]{2}$

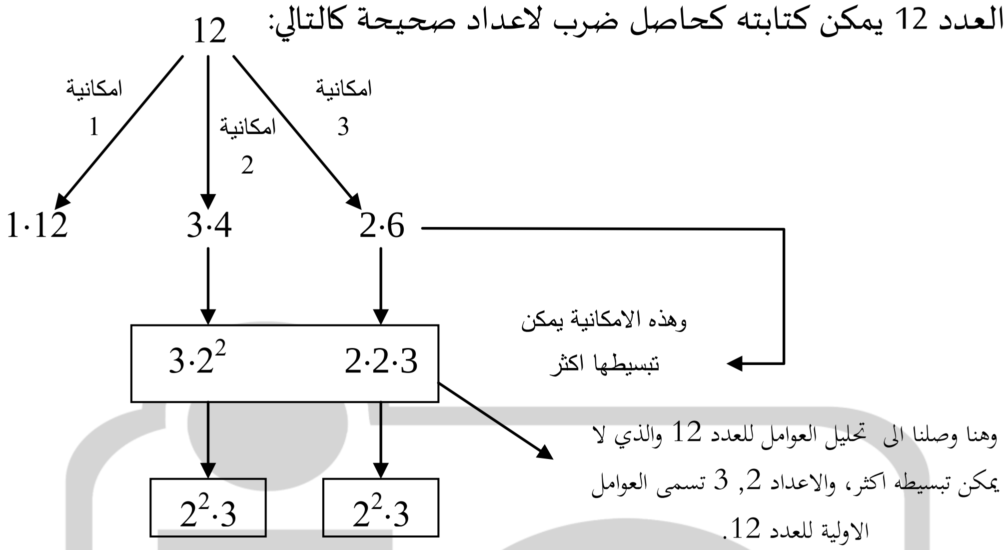
5. $\sqrt[3]{-3000}=\sqrt[3]{-1000\cdot 3}=\sqrt[3]{-1000}\cdot\sqrt[3]{3}=-10\sqrt[3]{3}$

التحليل الى عوامل:

تعريف

التحليل الى العوامل لعدد: هو عملية كتابة العدد كحاصل ضرب الاعداد المكونة له.

مثال: العدد 12 يمكن كتابته كحاصل ضرب لاعداد صحيحة كالتالي:



تذكر: عدد اولي هو عدد يقسم على نفسه وعلى 1 فقط (مثل 2، 3، 5، 7، 11...) وكل عدد يمكن كتابته كحاصل ضرب العوامل الاولية المركبة له.(انتبه العدد 1 ليس أولي)

ملاحظات:

1- كل عدد يمكن تحليله الى العوامل بعدة طرق (على الغالب) ولكن هناك طريقة واحدة لكتابته كحاصل ضرب العوامل الاولية المُكوّنة له.

2- العوامل الاولية للعدد: هي الاعداد الاولية التي حاصل ضربها يعطينا العدد نفسه.

3- انتبه العدد 1 ليس أولي.

<u>التحليل للعوامل لصورة العدد:</u> هي كتابة صورة العدد كحاصل ضرب العوامل المركبة لها.

امثلة:

(1) $3m+12 \longrightarrow 3(m+4)$

(2) $2m^2+m \longrightarrow m(2m+1)$

(3) $a^2b^3+b^2 \longrightarrow b(a^2b^2+b) \rightarrow b\cdot b(a^2b+1) \rightarrow b^2(a^2b+1)$

(4) $xy+y+2x+2 \longrightarrow y(x+1)+2(x+1) \rightarrow (x+1)(y+2)$

ملاحظات:

1-يمكن تحليل صورة عدد الى العوامل على عدة مراحل والمرحلة التي لا يمكن تبسيطها اكثر تسمى أبسط صورة (لصورة العدد).

2- العامل الذي نُخرجه خارج قوس يُسمى عامل مشترك لمُركبات صورة العدد وباختصار نسميه –**عامل مشترك**-

* العامل المشترك ممكن ان يكون عدد، حرف او قوس الذي يحوي صورة عدد (كما في المثال 4).

3- اذا فككنا الاقواس في ابسط صورة سنحصل على صورة العدد الاصلية.

امثلة اضافية:

$4x+6 \rightarrow 2(x+3)$

$6m^3+8m^2 \rightarrow 2m^2(3m+4)$

$6y+2xy+6x+18 \rightarrow 2y(3+x)+6(x+3) \rightarrow (x+3)(2y+6)$

$\rightarrow (x+3)\cdot 2(y+3) \rightarrow 2(x+3)(y+3)$

تمارين في التحليل للعوامل

حلل إلى العوامل صور الأعداد الآتية:

1) $5a+5b$ 2) $18x-12y$ 3) $4x+6y-8w$

4) $4a^2+2a$ 5) $8a^3+2a^4$ 6) $3x^3-6y^3\cdot x^2+9x^7$

7) $xy-3y-2x-6$ 8) $cx^2+ctx+cax+cat$ 9) $12xz^3+6z^5y+16x+8yz^2$

حلول تمرين تحليل للعوامل

1. $5a+5b = 5(a+b)$
2. $18x-12y = 6(3x-2y)$
3. $4x+6y - 8w = 2(2x+3y-4w)$
4. $4a^2 +2a = 2a(2a+1)$
5. $8a^3+2a^4 = 2a^3(4+a)$
6. $3x^3-6y^3\cdot x^2 +9x^7 = 3x^2(x-2y^3 +3x^2)$
7. $xy -3y - 2x + 6 = y(x-3)-2 (x-3)=(x-3) (y-2)$
8. $cx^2 + ctx + cax + cat = cx(x+t) +ca(x+t) = (x+t)\cdot(cx+ca) =$
   $(x+t)\cdot c\cdot(x+a)=c(x+t)(x+a)$
9. $12xz^3 + 6z^5y + 16x + 8yz^2 = 6z^3(2x+z^2y) + 8(2x+yz^2) = (2x+z^2y)(6z^3 + 8) =$
   $(2x+z^2y)\cdot 2(3z^3+4) = 2(2x+z^2y) (3z^3+4)$

قوانين الضرب المختصر

قوانين الضرب المختصر هي قوانين مختصرة لعمليات ضرب والتي يمكن استغلالها دون تنفيذ عملية الضرب.

في امتحان البسيخومتري يُطلب منك معرفة 3 من هذه القوانين والتي سنعرضها هنا ولكن هناك اكثر من 3 قوانين والتي من الممكن انك تعلمتها خلال مراحل دراستك الثانوية.

<u>قانون 1:</u> $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

<u>قانون 2:</u> $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

<u>قانون 3:</u> $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

تمارين في قوانين الضرب المختصر

1. بسط بالاعتماد على قوانين الضرب المختصر:

1) $(x+3)^2 =$ 2) $(x-4)^2 =$ 3) $(2x-5)^2 =$ 4) $(3x+8)^2 =$

5) $(x+8)(x-8)=$ 6) $(5x+3)(5x-3)=$ 7) $(3x^3-4)(3x^3+4)=$

8) $(4x^2-3x)^2 =$ 9) $(5x^3+2x)^2 =$ 10) $(7x^3-8x)(7x^3+8x)=$

2 جد قانون الضرب المختصر الملائم:

1) $x^2+2x+1=$ 2) $x^2-4x+4=$ 3) $9x^2+12x+4=$

4) $9x^2-9=$ 5) $9x^2-16=$ 6) $x^2-25=$

7) $25x^4+30x^2+9=$ 8) $4x^6+20x^3+25=$ 9) $81x^6-25=$

حلول تمارين قوانين الضرب المختصر

حلول تمرين1

1. $(x+3)^2 = x^2 +6x +9$
2. $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
3. $(2x-5)^2 = 4x^2 -20x +25$
4. $(3x +8)^2 = 9x^2 + 48x + 64$
5. $(8+x)(8-x) = 64-x^2$
6. $(5x+3) (5x-3) = 25x^2 - 9$
7. $(3x^3 -4)(3x^3 +4) = 9x^6 -16$
8. $(4x^2 -3x)^2 = 16x^4 -24x^3 + 9x^2$
9. $(5x^3+2x)^2 = 25x^6 + 20x^4 + 4x^2$
10. $(7x^3-8)(7x^3 +8x) = 49x^6 - 64x^2$

حلول تمرين 2

1. $x^2 + 2x +1 = (x+1)^2$
2. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
3. $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$
4. $9x^2 - 9 = (3x-3)(3x+3)$
5. $9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$
6. $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$
7. $25x^4 + 30x^2 + 9 = (5x^2+3)^2$
8. $4x^6 + 20x^3 + 25 =(2x^3+5)^2$
9. $81x^6- 25 = (9x^3-5)(9x^3+5)$

تبسيط صور أعداد

في تبسيط صور أعداد سنستغل كل ما تعلمناه حتى الآن:قوانين القوى، التحليل للعوامل، قوانين الضرب المختصر، لكي نكتب صورة عدد معقدة بصورة أسهل ومكافئة للأصلية.

مثال:

$$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-3} \to \frac{(x+1)^2}{3(x^2-1)} \to \frac{(x+1)\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}(x-1)} \to \frac{x+1}{3(x-1)}$$

ملاحظات

1. الاختزال ممكن فقط عندما ننتقل الى صورة عدد مكتوبة كحاصل ضرب.
2. صورة العدد المبسطة-التي حصلنا عليها بعد التبسيط - لها نفس القيمة العددية لصورة العدد الأصلية ،لكل عدد نعوضه مكان الأحرف.

فمثلاً إذا عوضنا x=1 وy=2 في المثال 1 سنحصل على :

$$\frac{3\cdot 1-6\cdot 2}{1-2\cdot 2}=\frac{3-12}{1-4}=\frac{-9}{-3}=3$$

وهي نفس النتيجة في صورة العدد المبسطة.

تمارين في تبسيط صور أعداد

1. بسط صور الأعداد الآتية:

1) $\frac{3x+3y}{x+y}=$ 2) $\frac{4x+8y}{2x+4y}=$ 3) $\frac{x-1}{x^2-1}=$ 4) $\frac{x^2+2x+1}{x+1}=$

5) $\frac{x-4}{2x^2-32}=$ 6) $\frac{a^2-a}{a^2-1}=$ 7) $\frac{3x^2-12x}{x-2}=$ 8) $\frac{5x^3-80x}{x-4}=$

حلول :

1. $\frac{3x+3y}{x+y}=\frac{3\cancel{(x+y)}}{\cancel{x+y}}=3$

2. $\frac{4x+8y}{2x+4y}=\frac{2\cancel{(2x+4y)}}{\cancel{2x+4y}}=2$

3. $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{1}{x+1}$

4. $\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x+1)}{\cancel{x+1}}=x+1$

5. $\frac{x-4}{2x^2-32}=\frac{x-4}{2(x^2-16)}=\frac{\cancel{x-4}}{2\cancel{(x-4)}(x+4)}=\frac{1}{2(x+4)}$

6. $\frac{a^2-a}{a^2-1}=\frac{a\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a+1)}=\frac{a}{a+1}$

7. $\frac{3x^3-12x}{x-2}=\frac{3x(x^2-4)}{x-2}=\frac{3x\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=3x(x+2)$

8. $\frac{5x^3-80x}{x-4}=\frac{5x(x^2-16)}{x-4}=\frac{5x\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=5x(x+4)$

ملاحظة :

الأختزال ممكن في حالة لم يكن المقام صفر أي صورة العدد التي في المقام لا تساوي صفر.
وفي الحلول المقترحة الأفتراض هو أن المقام لا يُساوي صفر.

تغيير صورة المعادلة:

نقصد في تغيير صورة المعادلة هو الانتقال من صورة معينة للمعادلة الى صورة اخرى مكافئة.
بشكل عام نتحدث عن معادلات التي تحوي اكثر من متغير واحد.

مثلاً:

(1) 3y+2x=4 هذه هي معادلة بمتغيرين

(2) x=3y+4m-3 هذه المعادلة تحوي 3 متغيرات

المتغير x معروض فيها في جهة واحدة من المعادلة والبقية في جهة اخرى.

هذه المعادلة تسمى الصورة الصريحة للمتغير x.

(3) $nx+my=\frac{3c-A}{4B}$ **هذه معادلة تحوي 8 متغيرات**

كيف نقوم بتغيير موضوع المعادلة:

امثلة:

معطى المعادلة $3x+2y=4$

أ- عبر عن x بالصورة الصريحة

ب- عبر عن y بالصورة الصريحة

الحل:

لكي نعبر عن x بالصورة الصريحة يجب ان نعزل x في جهة واحدة من المعادلة وبقية مركبات المعادلة بالجهة الاخرى.

أ.
$$3x+2y=4$$
$$3x=4-2y$$
$$x=\frac{4-2y}{3}$$ **هذه هي الصريحة ل X**

ب.
$$3x+2y=4$$
$$2y=4-3x$$
$$y=\frac{4-3x}{2}$$ **هذه هي الصريحة ل y**

<u>مثال اضافي:</u>

معطى $4B^2 - 9A = 5C$

عبر عن B بالصورة الصريحة

<u>الحل:</u>

نعزل B في طرف واحد من المعادلة وبقية المركبات <u>في الطرف الثاني</u>:

$$4B^2 = 5C + 9A$$

$$B^2 = \frac{5C + 9A}{4}$$

لكي نجد B ننفذ الجذر على الطرفين ونحصل على :

$$\sqrt{B^2} = \sqrt{\frac{5C + 9A}{4}}$$

$$B = \sqrt{\frac{5C + 9A}{4}}$$

ويمكننا تبسيط الصورة بواسطة اخراج ال 4 خارج الجذر، $2 = \sqrt{4}$، وبالتالي تصبح المعادلة

$$B = \frac{\sqrt{5C - 9A}}{2}$$

<u>مثال إضافي:</u>

معطى : $p = 2mc^2$

$c = ?$

<u>الحل:</u>

نعزل c في طرف من المعادلة:

$$p = 2mc^2$$

$$\frac{p}{2m} = c^2$$

$$\sqrt{\frac{p}{2m}} = c$$

تمارين في تغيير صورة المعادلة:

1. مُعطى : $S=(x+y)\frac{m}{2}$ $\quad m=?$

2. مُعطى : $K=\frac{1}{3}MN^2\cdot P$

أ- $P=?$

ب- $N=?$

3. مُعطى : $F=\frac{9c}{5}+12$ $\quad c=?$

4. مُعطى : $M=2k(x+y)$ $\quad x=?$

5. مُعطى : $L=K\cdot M$ $\quad K=\frac{P}{M}$

ا. $M=?$

انتبه هنالك أكثر من امكانية واحدة للتعبير عن M

ب. P=?

6. مُعطى : $y=\frac{P}{3-P}\cdot x$ $\quad P=?$

7. مُعطى : $4p^2y+5x=18-py$ $\quad y=?$

8. مُعطى : $a=\sqrt{\frac{x}{y}}$ $\quad x=?$

9. **مُعطى:** $T=xy^2+xyz$ $\quad x=?$

10. **مُعطى :** $b^2m=5n(k+b^2)$ $\quad b=?$

11. مُعطى : $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=C$ $\quad A=?$

12. مُعطى : $\frac{3}{A}-\frac{2}{B}=\frac{4}{C}$ $\quad B=?$

13. مُعطى : $a^2-b^2=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ $\quad (a+b\neq 0)$ $\quad a=?$

14. مُعطى : $(a+b)^2=a+2ab$ $\quad b=?$

15. مُعطى : $(a-b)^2=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$ $\quad (a\neq \pm b)$ $\quad a+b=?$

حلول تمارين - تغيير صورة المعادلة:

1. $S=(x+y)\cdot\frac{m}{2}\rightarrow 2S=(x+y)\cdot m\rightarrow\frac{2S}{x+y}=m$

2. $K=\frac{1}{3}MN^2\cdot P$

$P=\frac{3K}{MN^2}$

$N^2=\frac{3K}{PM}\rightarrow N=\sqrt{\frac{3K}{PM}}$

3. $F=\frac{9c}{5}+12$

$F-12=\frac{9c}{5}$

$\frac{5}{9}\cdot(F-12)=c$

4. $M=2K(x+y)$

$\frac{M}{2K}=x+y$

$\frac{M}{2K}-y=X$

5. (I) $L = K \cdot M$ (II) $K = \frac{P}{M}$

أ. من المعادلة (II): $M = \frac{P}{K}$ ومن المعادلة (I) : $\frac{L}{K} = M$

ب. $M = \frac{P}{K}$ وايضًا $M = \frac{L}{K}$. إذًا يتحقق $\frac{P}{K} = \frac{L}{K}$ إذًا $P = L$.

6. $y = \frac{P}{3-P} \cdot x$

$(3-P) \cdot y = Px$

$3y = Px + Py$

$3y = P(x+y)$

$\frac{3y}{x+y} = P$

7. $4P^2 y + 5x = 18 - Py$

نعزل y في جهة من المعادلة:

$4P^2 y + Py = 18 - 5x$

$y(4P^2 + P) = 18 - 5x$

$y = \frac{18-5x}{4P^2 + P}$

8. $a^2 = \frac{x}{y}$ نربع الطرفين:

$a^2 y = x$

9. $T = xy^2 + xyz$

$T = x(y^2 + yz)$

$\frac{T}{y^2 + yz} = x$

10. $b^2 m = 5n \cdot (K + b^2)$

$$\frac{b^2 m}{5n} = K + b^2$$

$$b^2 \frac{m}{5n} - b^2 = K$$

$$b^2\left(\frac{m}{5n} - 1\right) = K$$

$$b^2 = \frac{K}{\frac{m}{5n} - 1}$$

$$b = \sqrt{\frac{K}{\frac{m}{5n} - 1}}$$

11. $\frac{1}{A} = C - \frac{1}{B} = \frac{BC - 1}{B}$

$$\frac{1}{A} = \frac{BC - 1}{B}$$

$$A = \frac{B}{BC - 1}$$

12. $\frac{3}{A} - \frac{4}{C} = \frac{2}{B}$

$$\frac{3C - 4A}{A \cdot C} = \frac{2}{B}$$

$$\frac{AC}{3C - 4A} = \frac{B}{2}$$

$$\frac{2AC}{3C - 4A} = B$$

13. $a^2 - b^2 = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$$\cancel{(a+b)}(a-b) = \frac{\cancel{a+b}}{c}$$

$$(a-b) = \frac{1}{c}$$ تختزل a+b من الطرفين ونحصل على:

$$a = \frac{1}{c} + b$$

14. $a^2+2ab+b^2=a+2ab$

نشطب 2ab من طرفي المعادلة ونحصل على:

$$a^2+b^2=a$$

$$b^2=a-a^2$$

$$b=\sqrt{a-a^2}$$

15. $(a-b)^2=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{(a+b)\cancel{(a+b)}}{(a-b)\cancel{(a+b)}}$

$$(a-b)^2(a-b)=a+b$$

$$(a-b)^3=a+b$$